

奇异值衡量证据冲突的新方法

柯小路, 马荔瑶, 王 永

(中国科学技术大学自动化系, 安徽合肥 230027)

摘 要: 证据理论被广泛应用于决策级信息融合, 但还存在一定问题有待解决, 例如证据冲突的合理衡量仍未得到妥善处理. 针对已有方法的不足, 提出一种新的衡量方法, 将不同的证据表示成 BPA 矩阵的形式, 借助矩阵的性质对冲突进行研究. 根据 BPA 矩阵奇异值的特点, 提出以其最小奇异值衡量证据冲突. 算例表明了所提方法的有效性.

关键词: 证据理论; 证据冲突; 奇异值; 基本概率赋值

中图分类号: TP181 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013) 10-2109-05

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.10.037

A New Method to Measure Evidence Conflict Based on Singular Value

KE Xiao-lu, MA Li-yao, WANG Yong

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230027, China)

Abstract: Evidence theory is widely used in decision-level information fusion. However, there are also some problems to be solved. For instance, how to measure the conflict between two bodies of evidence is still an open issue. Thus, a new method with good behaviors to measure conflict is proposed. Different bodies of evidence are described as a BPA matrix whose properties are studied afterwards. Considering the properties of singular values of such a BPA matrix, the smaller one is chosen to measure the conflict. The effectiveness of the proposed method is illustrated by some examples.

Key words: evidence theory; evidence conflict; singular value; basic probability assignment

1 引言

在现实中, 由于各种干扰及其它因素影响, 常要在存有不精确, 不完整或不确定信息的情况下做出判断、决策. 证据理论作为一种决策级信息融合方法, 是贝叶斯理论的拓展, 因能区分不知道与不确定, 且无需先验知识, 在目标识别^[1], 故障诊断^[2]等领域得到了广泛应用.

证据理论的核心是组合规则, 然而 Dempster 组合规则融合冲突证据时, 却可能得到反直观结果. 为解决这一问题, 国内外学者相继提出多种解决方法^[3~5]. 很长一段时间, 冲突本身的研究一直被忽视, 直到冲突衡量在逼近算法的评估, 及信息源一致性定义等方面有着越来越多的应用^[6], 近来相继出现一些新的研究. Josselme^[7]定义了集合的相似性, 并在此基础上提出证据距离, 证据距离越大, 冲突程度越大; Liu^[8]将赌博承诺距离与冲突因子联合, 组成二元衡量指标; Destercke 等^[9]从集合的角度出发, 分析了冲突衡量应遵循的基本性质; 邓勇等^[10]引入随机变量中的关联熵、偏熵, 定义了

关联系数, 关联系数越大, 冲突越小. 这些方法在不同方面取得了良好效果, 一定程度上弥补了冲突因子的缺陷. 然而它们各有优缺点, 没有一种方法绝对优于另一种. 这也是证据冲突衡量中存在的一个问题: 目前就证据冲突还没有形成一个统一定义, 还有待更深入的研究与新方法的提出.

为合理衡量证据之间的冲突程度, 本文引入矩阵的表达形式, 并根据矩阵奇异值能有效反映矩阵结构特征这一性质, 提出以 BPA 矩阵的最小奇异值衡量两条证据的冲突程度. 对新方法的基本性质进行了证明, 通过数值算例及与常用方法的比较, 验证了新方法的有效性.

2 理论基础

证据理论是由 Dempster 提出, Shafer^[11]发展、完善而成的理论. 本节将介绍文中涉及的一些基本概念.

2.1 基本概念

定义 1^[11] 设 Θ 为目标识别框架, 其所有子集构成的集合(即幂集)记作 Ω . 若函数 $m: \Omega \rightarrow [0, 1]$, 且满足:

$m(A) \geq 0, \forall A \in \Omega; m(\emptyset) = 0; \sum_{A \subseteq \Theta} m(A) = 1$; 则称 m 为基本概率赋值(BPA), 称 $m(A)$ 为子集 A 的质量. 如果 $m(A) > 0$, 则称 A 为焦点.

定义 2^[5] 设 m 是识别框架 Θ 上的一个 BPA, 则与 m 对应的 Pignistic 转换, $BetP: \Omega \rightarrow [0, 1]$, 定义为:

$$BetP_m(\omega) = \sum_{A \subseteq \Theta} \frac{1}{|A|} \frac{m(A)}{1 - m(\emptyset)}, \forall \omega \in A \quad (1)$$

其中 $|A|$ 为子集 A 中所含元素个数.

定义 3^[11] 设识别框架 Θ 下两个 BPA 分别为 m_1 和 m_2 , 则 Dempster 组合规则定义如下:

$$m(X) = \begin{cases} \frac{\sum_{A, B \subseteq \Theta, A \cap B = X} m_1(A) m_2(B)}{1 - K} & X \neq \emptyset \\ 0 & X = \emptyset \end{cases} \quad (2)$$

其中 $K = \sum_{A \cap B = \emptyset} m_1(A) m_2(B)$ (3)

Dempster 组合规则满足交换律、结合律等基本性质, 是证据理论中最基本、常用的组合规则.

2.2 常用冲突衡量方法

式(3)所示的冲突因子 K 是形式最简单、最常用的冲突衡量方法. 然而实际上 K 存在一些问题, 如例 1 所示.

例 1 考虑以下三组 BPA:

$$S_1^1: m_1(\{\omega_1\}) = 0.99, m_1(\{\omega_2\}) = 0.01, m_1(\{\omega_3\}) = 0.00;$$

$$S_2^1: m_2(\{\omega_1\}) = 0.00, m_2(\{\omega_2\}) = 0.01, m_2(\{\omega_3\}) = 0.99.$$

$$S_3^1: m_1(\{\omega_1\}) = 0.2, m_1(\{\omega_2\}) = 0.2, m_1(\{\omega_3\}) = 0.2,$$

$$m_1(\{\omega_4\}) = 0.2, m_1(\{\omega_5\}) = 0.2;$$

$$S_2^2: m_2(\{\omega_1\}) = 0.2, m_2(\{\omega_2\}) = 0.2, m_2(\{\omega_3\}) = 0.2,$$

$$m_2(\{\omega_4\}) = 0.2, m_2(\{\omega_5\}) = 0.2;$$

$$S_3^3: m_1(\{\omega_1\}) = 0.8, m_1(\{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}) = 0.2;$$

$$S_2^3: m_2(\Theta) = 1.$$

由式(3), 可得三组证据的冲突因子: $K_1 = 0.9999, K_2 = 0.8, K_3 = 0$. 计算结果表明, 第一组证据高度冲突, 与实际情况相吻合; 第二组证据也存在较大冲突, 与实际矛盾, 因第二组证据是完全吻合的; 第三组证据没有冲突, 与实际存在一定偏差, 因第三组证据存在较大差异.

针对 K 的不足, 近来不少学者对证据冲突的合理衡量展开研究, 较具代表性的有以下几种.

定义 4 Josselme 证据距离^[7] 设识别框架 Θ 上有 N 个相互独立的元素, m_1, m_2 是 Θ 上的两个 BPA, 则有:

$$d_{BPA}(m_1, m_2) = \sqrt{\frac{1}{2} (m_1 - m_2)^T \cdot D \cdot (m_1 - m_2)} \quad (4)$$

其中, m_1 和 m_2 是 m_1, m_2 的 2^N 维列向量形式, 非焦点元素对应取值为 0; D 是 $2^N \times 2^N$ 矩阵, 其中元素为:

$$D(A, B) = |A \cap B| / |A \cup B|, A, B \subseteq \Theta. \quad (5)$$

定义 5 赌博承诺距离^[8] 设 m_1, m_2 是识别框架 Θ 上的两个 BPA, $BetP_1, BetP_2$ 是它们的 pignistic 转换, 则有:

$$d_{ifBetP}(m_1, m_2) = \max_{A \subseteq \Theta} (|BetP_{m_1}(A) - BetP_{m_2}(A)|) \quad (6)$$

以上两种方法均在一定程度上克服了冲突因子的缺陷. 如例 1 中的三组 BPA, d_{BPA} 和 d_{ifBetP} 对应的冲突衡量分别为: 0.99, 0, 0.7321 及 0.99, 0, 0.6. 它们的结果均与实际情况相符. 但它们也存在一定的不足, 如例 2 所示.

例 2 设识别框架 $\Theta = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ 上有三个 BPA:

$$m_1(\{\omega_1\}) = 1/3, m_1(\{\omega_2\}) = 1/3, m_1(\{\omega_3\}) = 1/3;$$

$$m_2(\Theta) = 1; \quad m_3(\{\omega_1\}) = 1.$$

虽然 m_1 和 m_2 都无法形成决策, 但却不能视为等同, 它们分别代表完全不确定和完全不知道这两个概念, 是证据理论区别于概率之处. 因而它们之间存在一定冲突, 但相对较小. m_3 完全支持 ω_1 , 与 m_1 和 m_2 都有很大差异, 因而冲突相应较大. 由于 m_1 对 ω_1 有一定支持, 而 m_2 对 ω_1 并无直接支持, 因而 m_1 与 m_3 之间的冲突相对 m_2 和 m_3 之间的冲突较小. 综上, 若以 $conf$ 表示冲突, 则应有 $conf(m_1, m_2) < conf(m_1, m_3) < conf(m_2, m_3)$.

根据式(4)和式(6)计算可得:

$$d_{BPA}(m_1, m_2) = 0.5774, \quad d_{ifBetP}(m_1, m_2) = 0;$$

$$d_{BPA}(m_1, m_3) = 0.5774, \quad d_{ifBetP}(m_1, m_3) = 2/3;$$

$$d_{BPA}(m_2, m_3) = 0.8165, \quad d_{ifBetP}(m_2, m_3) = 2/3.$$

两种方法的结果均与预期不同. 因而本文提出一种新的冲突衡量方法.

3 奇异值衡量冲突新方法

此前部分文献将矩阵引入证据理论, 以简化表达式, 或提高证据融合的效率. 但鲜有文献从矩阵本身的性质出发, 对冲突进行研究. 本文试图从这一方向出发, 构建 BPA 矩阵并研究其性质.

定义 6 设 m_1 和 m_2 是识别框架 Θ 上的两个 BPA, 对应的焦点集分别为 F_1, F_2 , 记 $F = F_1 \cup F_2 = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$, 则可定义如下 BPA 矩阵:

$$M = \begin{bmatrix} m_1(C_1), \dots, m_1(C_m) \\ m_2(C_1), \dots, m_2(C_m) \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中, 若 C_j 不是 m_i 的焦点, 则 $m_i(C_j)$ 取值为 0.

定义 7 设 m_1 和 m_2 是识别框架 Θ 上的两个 BPA, 对应的 BPA 矩阵为 M , 则新的证据冲突衡量定义如下:

$$diSV = \min(\sigma(M \cdot D)). \quad (8)$$

$\sigma(M \cdot D)$ 表示矩阵 $M \cdot D$ 的奇异值, D 的定义如式(5).

由奇异值的性质可知, 奇异值大小与各列相对顺序无关. 即构建 M 矩阵时, 可以按照任意顺序排列 C_1, C_2, \dots, C_m , 但为统一起见, 可按基数从小到大的顺序排列.

选择最小奇异值作为证据冲突的衡量, 是因为它更好

的体现了两条证据的差异程度,而最大奇异值则更多体现的是证据自身的聚散程度.例 3 将说明这一点.

例 3 对例 1 中三组 BPA,分别求取其对应的 M 、 D 矩阵,计算 $M \cdot D$ 的两个奇异值,分别有:

第一组: $\sigma_1 = 0.9901, \sigma_2 = 0.9900$.

第二组: $\sigma_1 = 0.6325, \sigma_2 = 0.0000$.

第三组: $\sigma_1 = 1.4188, \sigma_2 = 0.6705$.

上述结果中,最大奇异值都偏大,相互比较接近,且 BPA 越集中对应的数值越大;而最小奇异值则数值偏小,相互之间差异很大,且与证据的冲突程度一致.第一组证据冲突很大,对应的最小奇异值为 0.9900;第二组中两证据完全吻合,对应的最小奇异值为 0;第三组中存在一定冲突,但较第一组小,对应的最小奇异值为 0.6705.故以最小奇异值作为冲突的衡量是合适的.

该方法同时考虑了两方面因素,矩阵 D 反映了焦元之间的联系,而奇异值则反映了基本概率分配的差异,因而得到的结果比较全面.如果只考虑基本概率分配的差异,而忽略焦元的联系,使用 $\min\sigma(M)$ 作为冲突衡量,则可能得到不合理结果.例如可能存在两组证据有着相同的矩阵 M ,但是对应的焦元集却不同,即 D 不同.这时如果用 $\min\sigma(M)$,则无法区别两组的差异.这是因为将 BPA 写成矩阵形式后,各元素被等同对待,无法体现焦元之间的内在联系(含交集).因此必须通过矩阵 D 对其进行修正.

4 基本性质及效果分析

下面将对所提新方法的基本性质加以说明,并通过一些算例表明该方法的有效性.

4.1 基本性质

性质 1 新的冲突衡量方法满足以下性质:

- (1) $diSV(m_1, m_2) \geq 0$;
- (2) $diSV(m_1, m_2) = diSV(m_2, m_1)$;
- (3) $m_1 = m_2 \iff diSV(m_1, m_2) = 0$.

证明 由奇异值的性质易得性质(1),(2)以及 $m_1 = m_2 \implies diSV(m_1, m_2) = 0$,下面将证明性质(3)另一半.

首先可以求得 $diSV$ 的表达式:

$$diSV(m_1, m_2) = \frac{1}{2} [(m_1 D D^T m_1^T + m_2 D D^T m_2^T) - \sqrt{(m_1 D D^T m_1^T - m_2 D D^T m_2^T)^2 + 4(m_1 D D^T m_2^T)^2}]$$

$$diSV(m_1, m_2) = 0$$

$$\implies (m_1 D D^T m_1^T + m_2 D D^T m_2^T)^2 = (m_1 D D^T m_1^T - m_2 D D^T m_2^T)^2 + 4(m_1 D D^T m_2^T)^2$$

$$\implies m_1 D D^T m_1^T \cdot m_2 D D^T m_2^T = (m_1 D D^T m_2^T)^2$$

$$\implies [m_1 D \cdot (m_1 D)^T] \cdot [m_2 D \cdot (m_2 D)^T] = [m_1 D \cdot (m_2 D)^T]^2$$

由柯西不等式可知

$$[m_1 D \cdot (m_1 D)^T] \cdot [m_2 D \cdot (m_2 D)^T] \geq [m_1 D \cdot (m_2 D)^T]^2,$$

等号成立当且仅当

$$m_1 D = \lambda m_2 D$$

$$\implies (m_1 - \lambda m_2) D = 0 \implies m_1 - \lambda m_2 = 0 \implies m_1 = m_2. \quad \text{证毕.}$$

4.2 效果分析

例 4^[7] 设识别框架 Θ 含有 20 个元素,分别用 1, 2, ..., 20 表示元素 1, 元素 2, ..., 元素 20. 第一个 BPA 定义为: $m_1(\{2, 3, 4\}) = 0.05, m_1(\{7\}) = 0.05, m_1(A) = 0.8, m_1(\Theta) = 0.1$; 其中 A 是 Θ 的子集. 第二个 BPA 定义为: $m_2(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = 1$. 则 A 每次增加一个元素,从 $\{1\}$ 增至 Θ , 共对应 20 种情况,这一过程中 m_1 和 m_2 冲突程度的变化曲线如图 1 所示.

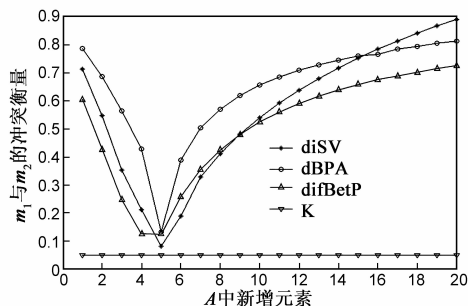


图 1 新方法与常用冲突衡量方法比较

本文方法对应图中蓝色曲线, K 对应粉红色曲线, 红色及绿色曲线分别对应 d_{BPA} 和 d_{ifBetP} . 从图中可以看出, K 始终保持 0.05, 没有任何变化, 这显然是不合理的. 而本文及另两种方法的结果均有明显变化, 且具有相同的趋势: 起初随着 A 中元素的增多, 两条证据逐渐逼近, 冲突衡量逐渐减小; 在 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 处, 两条证据达到最近, 冲突衡量达到最小; 此后, 随着 A 中元素进一步增加, 两条证据逐渐分离, 冲突衡量又逐渐增大. 故新方法能够正确反映这一过程中两条证据的冲突变化情况.

例 5 利用本文所提方法分析例 2 冲突关系.

在例 2 中已对三组证据进行了直观分析, 它们的冲突应有关系 $conf(m_1, m_2) < conf(m_1, m_3) < conf(m_2, m_3)$, 而 d_{BPA}, d_{ifBetP} 都不满足这一条件. 使用本文方法, 它们对应的最小奇异值分别为:

$$diSV_{12} = 0.2961, diSV_{13} = 0.4419, diSV_{23} = 0.6667.$$

可见, 满足关系 $diSV_{12} < diSV_{13} < diSV_{23}$, 与此前分析得到的顺序一致. 故在某些情况下本文方法能够给出更好的结果.

5 结论

证据高度冲突时, 使用 Dempster 组合规则可能得到直观结果. 为避免这一问题, 首先要对证据冲突进行合适的衡量. 本文提出一种新的途径: 将两条证据用 BPA 矩阵的形式表示, 从而将冲突衡量问题转化为矩阵性质的研究问题. 通过分析, 提出以最小奇异值作为冲突衡量. 该方法综合考虑了基本概率赋值的差异与焦元之间的关联, 能够

较全面的反映证据体之间的冲突.数值实例表明,该方法能够有效反映证据之间的冲突.

本文将证据的冲突衡量问题转化为矩阵的性质研究问题.初步提出使用最小奇异值作为衡量,并取得了较好的效果,但在这方面,仍需要更深入的研究.

参考文献

- [1] 康兵义,李娅,邓勇,等.基于区间数的基本概率指派生成方法及应用[J].电子学报,2012,40(6):1092-1096.
KANG Bing-yi, LI Ya, DENG Yong, et al. Determination of basic probability assignment based on interval numbers and its application[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(6): 1092-1096. (in Chinese)
- [2] 文成林,周哲,徐晓滨.一种新的广义梯形模糊数相似性度量方法及在故障诊断中的应用[J].电子学报,2011,39(S1):1-6.
WEN Cheng-lin, ZHOU Zhe, XU Xiao-bin. A new similarity measure between generalized trapezoidal fuzzy numbers and its application to fault[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(S1): 1-6. (in Chinese)
- [3] Dubois D, Prade H. A set-theoretic view of belief functions: Logical operations and approximations by fuzzy sets[J]. International Journal of General Systems, 1986, 12(3): 193-226.
- [4] 胡昌华,司小胜,周志杰,等.新的证据冲突衡量标准下的 D-S 改进算法[J].电子学报,2009,37(7):1578-1583.
HU Chang-hua, SI Xiao-sheng, ZHOU Zhi-jie. An improved D-S algorithm under the new measure criteria of evidence conflict[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(7): 1578-1583. (in Chinese)
- [5] Smets P, Kennes R. The transferable belief model[J]. Artificial Intelligence, 1994, 66(2): 191-234.
- [6] Jousselme A L, Maupin P. Distances in evidence theory: Comprehensive survey and generalizations[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2012, 53(2): 118-145.
- [7] Jousselme A L, et al. A new distance between two bodies of evidence[J]. Information Fusion, 2001, 2(2): 91-101.
- [8] Liu W R. Analyzing the degree of conflict among belief functions [J]. Artificial Intelligence, 2006, 170(11): 909-924.
- [9] Destercke S, Burger T. Toward an axiomatic definition of conflict between belief functions [OL]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=6294458, 2012-09-03.
- [10] 邓勇,王栋,李齐,等.一种新的证据冲突分析方法[J].控制理论与应用,2011,28(6):839-844.
DENG Yong, WANG Dong, LI Qi, et al. A new method to analyze evidence conflict[J]. Control Theory & Application, 2011, 28(6): 839-844. (in Chinese)
- [11] Shafer G A. A Mathematical Theory of Evidence[M]. Princeton: Princeton University Press, 1976.

作者简介

柯小路 男,1990年生,安徽巢湖人,硕士研究生,主要研究方向:证据理论、信息融合.

E-mail: kxlu@mail.ustc.edu.cn.

马荔瑶 女,1988年生,山东济南人,博士研究生,主要研究方向:证据理论、故障诊断.

E-mail: liyma@mail.ustc.edu.cn.



王永(通讯作者) 男,1962年生,安徽长丰人,教授、博士生导师,主要研究方向:振动主动控制、运动体控制、信息融合等.

E-mail: yongwang@ustc.edu.cn.